

2027학년도 모의논술고사

자연계열 채점기준



[문제 1-1]

(1) 함수 $f(x)$ ($x > 0$)의 도함수와 이계도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = (nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = (n-x)x^{n-1}e^{-x},$$

$$f''(x) = (n(n-1)x^{n-2} - 2nx^{n-1} + x^n)e^{-x} = (n(n-1) - 2nx + x^2)x^{n-2}e^{-x}.$$

$f'(x) = 0$ 과 $f''(x) = 0$ 을 만족하는 양수 x 를 구하면 $c_n = n$, $a_n = n - \sqrt{n}$, $b_n = n + \sqrt{n}$ 이다.

[채점 기준]

- 함수 $f(x)$ 의 도함수와 이계도함수를 바르게 구하면 2점
- c_n , a_n , b_n 을 바르게 구하면 3점

(2) [문제 1-1]의 (1)의 풀이를 이용하면 다음의 표를 얻는다.

x	$x=0$	$\cdots$	$x=a_n$	$\cdots$	$x=c_n$	$\cdots$	$x=b_n$	$\cdots$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	(극대)	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
$f'(x)$	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+

제시문에 주어진 것처럼 곡선 $y=f(x)$ 는 열린구간 (a_n, b_n) 에서 위로 볼록이고, 따라서 선분 AC와 선분 CB는 곡선의 아래에 있다. 그러므로 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=b_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 선분 AC, 선분 CB와 x 축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=b_n$ 으로 둘러싸인 오각형 도형의 넓이 S_n 보다 크다. 한편 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{1}{2}(f(a_n) + f(c_n))(c_n - a_n) + \frac{1}{2}(f(c_n) + f(b_n))(b_n - c_n) = \frac{1}{2}(f(a_n) + 2f(c_n) + f(b_n))\sqrt{n}.$$

이 식을 관찰하면 $n \geq 4$ 인 자연수에 대하여 $S_n \geq f(c_n)\sqrt{n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 임을 알 수 있다. 따라서 n 의 값이 한없이 커질 때 수열 $\{S_n\}$ 은 **발산**한다.

[채점 기준]

- 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a_n$, $x=b_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 S_n 보다 큼을 바르게 보이면 2점.
- S_n 의 식을 바르게 서술하면 2점.
- 수열 $\{S_n\}$ 이 발산함을 논리적으로 잘 서술하면 4점.



(3) $a_n = n - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 이다. 이차함수 $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 가 열린구간 $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ 에서 증가

하고 $n \geq 3$ 인 자연수에 대하여 $\sqrt{n} > \frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n \geq a_3 = 3 - \sqrt{3} \geq 3 - 2 = 1$$

이다.

[채점 기준]

- a_n 이 n 이 커지면서 증가함을 보이면 3점
- $n \geq 3$ 인 자연수에 대하여 $a_n \geq 1$ 을 보이면 1점

(4) 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점 $A(a_n, f(a_n))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n)$$

이다. 따라서 이 접선과 x 축이 만나는 점의 x 좌표 d_n 은

$$d_n = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^n e^{-a_n}}{(n - a_n)a_n^{n-1} e^{-a_n}} = a_n - \frac{a_n}{n - a_n} = (n - \sqrt{n}) - \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = n - 2\sqrt{n} + 1$$

또는 $(\sqrt{n} - 1)^2$ 이다.

[채점 기준]

- 접선의 식을 바르게 서술하고 d_n 에 대한 공식을 찾으면 2점
- d_n 을 논리적으로 정확하게 구하면 3점

(5) [문제 1-1]의 (2)의 풀이에 있는 표를 참고하면 제시문에 주어진 것처럼 곡선 $y = f(x)$ 는 열린구간 $(0, a_n)$ 에서 아래로 볼록이다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선은 곡선의 아래에 있다. 그러므로 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = a_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 T_n 보다 크다. 한편 T_n 은 다음과 같다.

$$T_n = \frac{1}{2}f(a_n)(a_n - d_n).$$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, c_n)$ 에서 증가하므로 [문제 1-1]의 (3)과 (4)를 이용하면

$$T_n \geq \frac{1}{2} f(1)(\sqrt{n}-1) = \frac{1}{2} 1^n e^{-1} (\sqrt{n}-1)$$

이고 n 의 값이 한없이 커질 때 수열 $\{T_n\}$ 은 발산한다.

[채점 기준]

- 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=a_n$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 T_n 보다 큼을 바르게 보이면 2점
- T_n 의 식을 바르게 서술하면 1점
- 수열 $\{T_n\}$ 이 발산함을 논리적으로 잘 보이면 5점

[문제 1-2]

(1) 하나의 ‘기록’에서 n 개의 칸 중 1이 적힌 칸의 개수 k 는 0과 n 이하의 자연수 중 하나이다. 따라서 나머지 $n-k$ 개의 칸에는 -1 이 적혀 있고 이때 $m=k+(-1)(n-k)$ 가 된다. 그러므로 자연수 n 에 대하여 가능한 ‘기록값’ m 은 $m=2k-n$ 이다. (단, $0 \leq k \leq n$) 즉 $-n$ 에서 2씩 더해 나간 $n+1$ 개의 값이다. 특히 n 이 짝수인 경우 $m=0$ 이 가능한 기록값에 포함된다.

각 $m=2k-n$ 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수는 n 개의 칸에서 순서를 생각하지 않고

k 개를 선택하는 조합의 수 ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 와 같고, $k = \frac{n+m}{2}$ 이므로

$$\frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \left(\frac{n-m}{2}\right)!}$$

이다.

[채점 기준]

- m 의 값을 논리적으로 잘 찾아내면 3점
- 각 m 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수를 m , n 만의 표현으로 논리적으로 찾아내면 3점

(2) n 이 어떤 짝수의 제곱이므로 $n=4l^2$ 의 꼴로 표현할 수 있다. (단, l 은 자연수) 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 근이 중근 또는 서로 다른 두 허근이 되려면 $m^2-4n \leq 0$ 또는 $|m| \leq 4l$ 이어야 한다. m 의 가장 큰 값 $4l$ 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수 p_n 은 [문제 1-2]의 (1)의 풀이를 이용하면

$$p_n = \frac{(4l^2)!}{(2l^2+2l)!(2l^2-2l)!}$$

으로 표현할 수 있다. (단, $n=4l^2$) 한편 n 이 짝수이므로 절댓값이 가장 작은 m 의 값은 0이다. 따라서 $m=0$ 을 ‘기록값’으로 가지는 서로 다른 ‘기록’의 개수 q_n 은

$$q_n = \frac{(4l^2)!}{(2l^2)!(2l^2)!}$$

이다. 그러므로

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{(2l^2)!(2l^2)!}{(2l^2 + 2l)!(2l^2 - 2l)!}$$

이며 계승의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(2l^2)(2l^2-1)\cdots(2l^2-2l+1)}{(2l^2+2l)(2l^2+2l-1)\cdots(2l^2+1)} \\ &= \frac{2l^2+2l-2l}{2l^2+2l} \times \frac{2l^2+2l-1-2l}{2l^2+2l-1} \times \cdots \times \frac{2l^2+1-2l}{2l^2+1} \end{aligned}$$

과 같이 $2l$ 개의 1보다 작은 분수의 곱으로 정리할 수 있다.

이제 부등식 $\frac{a+1-b}{a+1} \geq \frac{a-b}{a}$ (단, $a > 0, b > 0$)을 이용하면 다음을 관찰할 수 있다.

$$\left(\frac{2l^2+1-2l}{2l^2+1} \right)^{2l} \leq \frac{p_n}{q_n} \leq \left(\frac{2l^2+2l-2l}{2l^2+2l} \right)^{2l}. \quad (\text{단, } n = 4l^2)$$

또한

$$\left(\frac{2l^2+1-2l}{2l^2+1} \right)^{2l} = \left(1 - \frac{2l}{2l^2+1} \right)^{2l} \geq \left(1 - \frac{2l}{2l^2} \right)^{2l} = \left(1 - \frac{1}{l} \right)^{2l},$$

$$\left(\frac{2l^2+2l-2l}{2l^2+2l} \right)^{2l} = \left(\frac{l}{l+1} \right)^{2l} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{l} \right)^{2l}}$$

의 관찰을 이용하면

$$\left(1 - \frac{1}{l} \right)^{2l} \leq \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{l} \right)^{2l}}$$

이 성립함을 알 수 있다.

이제 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$ (단, $a \neq 0, b \neq 0$)를 이용하면

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{l} \right)^{2l} = e^{-2}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l} \right)^{2l} = e^2$$

이므로 n 이 짝수의 제곱으로써 한없이 커질 때 수열 $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$ 은 e^{-2} 로 수렴함을 알 수 있다.

[채점 기준]

- $n = 4l^2$ 으로 표현해 내면 1점
- $\frac{p_n}{q_n}$ 에 대한 l 만의 표현식을 구하면 2점
- $\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{2l} \leq \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{l}\right)^{2l}}$ 의 부등식을 논리적으로 유도하면 8점
- $\lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{l}\right)^{2l} = e^{-2}$, $\lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^{2l} = e^2$ 을 관찰하여서 n 이 짝수의 제곱으로써 한없이 커질 때 수열 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ 이 e^{-2} 로 수렴함을 보이면 3점

[문제 2-1]

(1) [그림 2]에 의해 자연수 k 와 $0 \leq x \leq 20$ 인 정수 x 에 대해 점 (x, k) 는 $g(x) > k$ 이면 b_k 에 포함되고 $g(x) \leq k$ 이면 c_k 에 포함되므로 $k = g(x)$ 일 때 a_k 의 값의 변화가 생긴다는 것을 알 수 있다. 각 x 값에 대한 $g(x)$ 의 값을 계산하면

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(x)$	75	56	39	24	11	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0	11	24	39	56	75

이다. 함숫값을 작은 값부터 나열하면 0, 9, 11, 16, 21, 24, 25, 39, 56, 75이다. 문제에서 $1 \leq k \leq 30$ 인 경우를 생각하므로 a_k 의 값은 $1 \leq k < 9$, $9 \leq k < 11$, $11 \leq k < 16$, $16 \leq k < 21$, $21 \leq k < 24$, $24 \leq k < 25$, $25 \leq k \leq 30$ 인 각 구간에서 같은 값을 가진다.

각 구간에서의 a_k , b_k , c_k 의 값을 계산하면 다음과 같다.

k	$1 \leq k < 9$	$9 \leq k < 11$	$11 \leq k < 16$	$16 \leq k < 21$	$21 \leq k < 24$	$24 \leq k < 25$	$25 \leq k \leq 30$
a_k	17	13	9	5	1	-7	-9
b_k	19	17	15	13	11	7	6
c_k	2	4	6	8	10	14	15

따라서

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 8 \times 17 + 2 \times 13 + 5 \times 9 + 5 \times 5 + 3 \times 1 + 1 \times (-7) + 6 \times (-9) = 174$$

이다.

[채점기준]

- 구간별 a_k 의 값을 올바르게 계산하면 6점
- $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 을 올바르게 계산하면 4점



[별해]

$y=30$ 과 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형(경계 포함)의 정수 점의 개수를 M 이라 하면 전체 점의 개수 $21 \times 30 = 630$ 에서 $2M$ 을 빼주면 된다. $x=3, 9, 11, 17$ 일 때 7개, $x=10$ 일 때 6개, $x=4, 16$ 일 때 20개, $x=5, 15$ 일 때 30개, $x=6, 14$ 일 때 22개, $x=7, 13$ 일 때 15개, $x=8, 12$ 일 때 10개이므로 $M=228$ 이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 630 - 2 \times 228 = 174$$

이다.

(2) 음이 아닌 정수 p 가 증가하면 [그림 2]의 $g(x)$ 의 그래프는 x 축의 방향으로 평행이동하며, 이에 따라 b_k 와 c_k 의 값이 변한다. $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 는 최대가 되려면, $1 \leq k \leq 30$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 $b_k = 21$, $c_k = 0$ 이어야 한다. 이를 만족하려면 $g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 충분히 평행이동시키면 된다. 따라서 $p > 25$ 이고 $g(20) \geq 30$ 이어야 한다. 즉,

$$g(20) = (20-p)^2 - 25 \geq 30 \rightarrow (20-p)^2 \geq 55 \rightarrow p \geq 20 + \sqrt{55}$$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 가 최대가 되도록 하는 p 의 최솟값은 28이다.

[채점기준]

- $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 가 최대가 되는 상황을 관찰하면 5점
- p 의 최솟값을 올바르게 계산하면 5점

[문제 2-2]

(1) $g(x) = 30$ 을 만족하는 x 의 값은 $p \pm \sqrt{55}$ 이고 열린구간 $(p-5, p+5)$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 최댓값은 25이므로, $g(x) \leq 30$ 을 만족하는 구간은 $p - \sqrt{55} \leq x \leq p + \sqrt{55}$ 이다. $a_{30} < 0$ 이 되려면 직선 $y=30$ 위에서 x 좌표가 $p - \sqrt{55} \leq x \leq p + \sqrt{55}$ 구간에 포함되는 점의 개수(c_{30})가 11 이상이어야 한다. 이 구간의 길이가 $2\sqrt{55} (> 14)$ 이므로, $c_{30} \geq 11$ 인 필요충분조건은 $x=10$ 이 이 구간에 포함되는 것이다. 따라서

$$p - \sqrt{55} \leq 10 \text{ 그리고 } 10 \leq p + \sqrt{55} \rightarrow 10 - \sqrt{55} \leq p \leq 10 + \sqrt{55}$$

이다. 이 조건을 만족하는 정수 p 는 $3 \leq p \leq 17$ 이므로, 정수 p 의 개수는 15이다.

[채점기준]

- $a_{30} < 0$ 를 만족하는 상황을 관찰하면 4점
- 정수 p 의 개수를 올바르게 계산하면 4점

(2) [문제 2-2]의 (1)을 만족하는 정수 p 의 최솟값은 3이므로

$$g(x) = \begin{cases} -(x-3)^2 + 25 & (-2 < x < 8) \\ (x-3)^2 - 25 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 8) \end{cases}$$

이다. $g(x) = 39$ 를 만족하는 x 의 값은 -5 와 11 이므로 함수 $y = h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} -13x - 26 & (x < -2) \\ 5x + 10 & (-2 \leq x < 3) \\ -5x + 40 & (3 \leq x < 8) \\ 13x - 104 & (x \geq 8) \end{cases}$$

‘ S 의 덮개’는 제1사분면에 있는 경우를 고려하므로 $0 \leq x \leq 11$ 인 경우를 생각하자. $\ell = 1$ 이므로 각 닫힌 구간 $[i, i+1]$ ($i = 0, 1, \dots, 10$)에서 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수를 세면 된다. $0 \leq x \leq 11$ 에서 $h(x) \leq 39$ 이므로 닫힌구간 $[i, i+1]$ 에서 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수는 39에서 ‘ S 의 덮개’에 포함되지 않는 정사각형의 개수를 빼는 것과 같다. ‘ S 의 덮개’에 포함되지 않는 정사각형의 개수는 $h(i)$ 와 $h(i+1)$ 중 더 작은 값과 같다. 즉, ‘ S 의 덮개’에 포함되지 않는 정사각형의 개수는 함수 $y = g(x)$ 가 감소하는 구간에서는 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값, 증가하는 구간에서는 왼쪽 끝에서의 함숫값과 같다. 그러므로

$$\begin{aligned} \text{개수} &= (39 - h(0)) + (39 - h(1)) + (39 - h(2)) + (39 - h(4)) + (39 - h(5)) + (39 - h(6)) + (39 - h(7)) \\ &\quad + (39 - h(8)) + (39 - h(8)) + (39 - h(9)) + (39 - h(10)) = 295 \end{aligned}$$

이다.

[채점기준]

- 함수 $h(x)$ 를 올바르게 구하면 3점
- 증가하는 구간과 감소하는 구간에 대해 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수를 관찰하면 4점
- ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수를 올바르게 계산하면 3점

(3) 닫힌구간 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ 에서 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수는 함수 $y = h(x)$ 가 증가할 때

$$\left(39 - h\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \times n \text{개이고, 감소할 때 } \left(39 - h\left(\frac{i}{n}\right)\right) \times n \text{개다.}$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $y = h(x)$ 는 증가하므로, 이 구간에서 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수를 d_n 이라 하면

$$\frac{d_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(39 - h\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \times n = \sum_{i=1}^n \left(39 - h\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \frac{1}{n}$$

이다. 따라서 정적분과 급수와의 관계를 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(39 - h\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 (39 - h(x)) dx$$

이다. 같은 방식으로 닫힌구간 $[1, 2], [2, 3], \dots, [10, 11]$ 에서 정적분과 급수와의 관계를 이용하면



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n^2} = \int_0^{11} (39 - h(x)) dx = \frac{511}{2}$$

이다.

[채점기준]

- 증가하는 구간과 감소하는 구간에 대해 ‘ S 의 덮개’에 포함되는 정사각형의 개수를 관찰하면 4점
- 각 구간에서 $\frac{d_n}{n^2}$ 을 올바르게 계산하면 4점
- 정적분과 급수와의 관계를 이용하여 극한을 올바르게 조사하면 4점